CONCOURS 1984

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Durée : 2 heures

Les parties I et II sont indépendantes entre elles.

I

On considère une fonction f et $(n+1)$ points distincts deux à deux, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ appartenant à un intervalle où f est définie.

On cherche le polynôme L de degré n, prenant la même valeur que f en chaque point x_k, c'est-à-dire tel que :

(1) $$\forall\, k \in [0, n], \quad L(x_k) = f(x_k)$$

1° On écrit ce polynôme d'interpolation en l'ordonnant suivant les puissances croissantes : $L(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

On note :

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

La condition (1) s'écrit matriciellement : $VA = F$

a. Écrire la matrice V en fonction de $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Prouver que V est inversible. On pose : $M = V^{-1}$.

.../...

En notant $X = [1\ x\ x^2\ \dots\ x^n]$, on peut donc écrire :

$$L(x) = XMF$$

b. Soit L_k le polynôme de degré n, avec $k \in [0, n]$, tel que :

$$\forall\ i \in [0, n] \qquad L_k(x_i) = \delta_{ik},$$

c'est-à-dire :

$$L_k(x_i) = 0 \text{ si } i \neq k \text{ et } L_k(x_k) = 1.$$

Montrer que les coefficients de L_k sont les éléments de la colonne d'indice k de la matrice M. (Remarquer que la numérotation des indices commence à 0).

c. Prouver :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

2° Calculer les éléments de la matrice M d'ordre 5, pour $n = 4$ et les valeurs équidistantes : $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$.

On écrira M sous la forme $\frac{1}{24}$ N où N est une matrice à éléments entiers.

3° Soit f définie par : $f(t) = \frac{1}{(1 + t^2)^2}$. On l'approche sur $[0, \sqrt{2}]$ par le polynôme $L(t)$ du 4° degré prenant les mêmes valeurs que f respectivement pour les 5 valeurs équidistantes :

$$t_0 = 0 ; \qquad t_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} ; \ t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \ t_3 = \frac{3\sqrt{2}}{4} ; \ t_4 = \sqrt{2}.$$

A l'aide du changement de variable, $x = 2t\sqrt{2}$, et de la matrice M, calculer les coefficients de $L(t)$.

On donnera ces coefficients avec 6 décimales.

II

1° On pose :

$$J_n(t) = \int_0^x \frac{dt}{(1 + t^2)^n} \text{ où } n \text{ est entier.}$$

a. Trouver une relation de récurrence donnant J_{n+1} en fonction de J_n, pour $n \geqslant 1$.

b. Calculer, avec 6 décimales : $J_1(\sqrt{2})$, $J_2(\sqrt{2})$, $J_3(\sqrt{2})$, $J_4(\sqrt{2})$.

2° Calculer, avec 6 décimales :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t\,dt}{(1 + t^2)^2} ; \quad \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^2\,dt}{(1 + t^2)^2} ; \quad \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^3\,dt}{(1 + t^2)^2} ; \quad \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^4\,dt}{(1 + t^2)^2}.$$

III

Pour évaluer la qualité de l'approximation de f par L, calculer ε défini par :

$$\varepsilon^2 = \int_0^{\sqrt{2}} [L(t) - f(t)]^2\,dt.$$

I P 158